FICHE - DÉRIVÉES

Niveau : CEGEP / universitaire

OBJECTIFS :

* comprendre le concept de taux de variation et pente d'une courbe.
* savoir calculer la dérivée de fonctions simples
* connaître les règles de dérivation
* interpréter une dérivée d'un point de vue graphique

COMMENT ÉTUDIER LE SUJET ?

→ tu dois comprendre la théorie derrière les dérivées pour comprendre leur application dans des problèmes concrets (en général en physique)

→ tu dois apprendre par cœur les formules de dérivation

C'EST TOUT ! C'EST SANS STRESS ☺

1- Rappel : fonction, courbe, tangente

- Fonction = relation, qui associe une valeur d'entrée à une valeur de sortie.
  Exemple : $f(a) = a^2$ → à chaque valeur x entrée, on associe x^2.

- Courbe = ce qu'on obtient en traçant une fonction

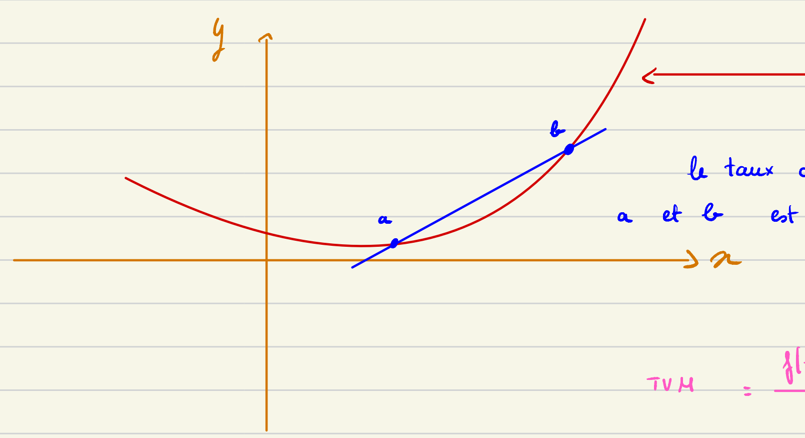
- Tangente = une droite qui touche une courbe en un seul point, et qui suit la direction de la courbe à cet endroit précis.
  La tangente nous donne une idée de la pente de la courbe à ce point là.

2- En BREF c'est quoi une dérivée ?

IMAGINE QU'ON VEUT SAVOIR À QUELLE VITESSE UNE FONCTION CHANGE

Taux de variation moyen

entre 2 points, c'est comme calculer la pente d'une droite entre 2 points de la courbe.



courbe de $f(a)$

le taux de variation moyen entre les points a et b est la pente de la droite bleue

$$TVM = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Taux de variation instantané

C'est quand on veut connaître la vitesse à un point précis.

= CE QUE NOUS DONNE UNE DÉRIVÉE

courbe de $f(a)$

la droite bleue est la tangente de la courbe de $f(a)$ au point c. La pente de cette tangente, c'est la dérivée de $f(a)$ au point c.

DONC EN GROS : une dérivée, c'est le taux de variation instantané d'une fonction à un point précis, c'est à dire la vitesse à laquelle la fonction change à ce point.

Tu calcules la dérivée de $f(x)$, c'est $f'(x)$. Puis tu remplaces x par le point en question.

Et tu as le taux de variation instantané à ce point !

Maintenant tu comprends le concept des taux de variation. Le but de cette fiche est de calculer des dérivées, pas de s'étendre sur la théorie. Mais note que la définition formelle d'une dérivée en mathématiques est :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Il est aussi possible d'utiliser cette formule pour calculer des dérivées ! Mais ça peut être plus long que juste appliquer les règles de dérivation ☺

RÈGLES DE DÉRIVATION

VOICI LA PARTIE QUE TU APPRENDS PAR COEUR !!! Ne te laisse pas impressionner par la taille du tableau, il est très détaillé ! Regarde la page d'après si tu es découragé !

La dérivée (première dérivée) d'une fonction $f(x)$ se note $f'(x)$ (dit f prime de x).

NOMS (pas besoin de les apprendre eux 😉)	RÈGLE	EXEMPLES pour t'aider à comprendre ! 😉
Constante	Soit c une constante, $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ La dérivée d'une constante est 0	$f(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$ $f(x) = \pi \Rightarrow f'(x) = 0$
Identité retiens que s'il y a une constante devant une variable (x), on garde toujours la constante !	Soit $a \in \mathbb{R}$ (une constante) $f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$ tu peux voir ça comme $f'(x) = a(1)x^{1-1} = a$	$f(x) = 5x \Rightarrow f'(x) = 5$ $f(x) = x = 1x \Rightarrow f'(x) = 1$
Puissance	Soit $n \in \mathbb{Z}$ (entier positif ou négatif) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$	$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$ ⚠ attention au signe $f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$
Somme et différence	Soient f et g deux fonctions $(f+g)' = f' + g'$ $(f-g)' = f' - g'$ → La dérivée d'une somme est la somme des dérivées.	Soient $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^8$, $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2$ et $g'(x) = 8x^7$, $x \in \mathbb{R}$ $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) = 2 + 8x^7$, $x \in \mathbb{R}$
Produit	Soient f et g deux fonctions $(fg)' = f'g + fg'$	Soient $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^8$, $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2$ et $g'(x) = 8x^7$, $x \in \mathbb{R}$ $[f(x) \times g(x)]' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ " $= 2 \times x^8 + 2x \times 8x^7$ " $= 18x^8$
Quotient	Soient f et g deux fonctions $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ⚠ dans une soustraction l'ordre compte TU AS REMARQUÉ QUE $\left[\frac{f}{g}\right]' \neq \frac{f'}{g'}$	Soient $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^8$, $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2$ et $g'(x) = 8x^7$, $x \in \mathbb{R}$ $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{2 \times x^8 - 2x \times 8x^7}{(x^8)^2}$ " $= -\frac{14x^8}{x^{16}} = -\frac{14}{x^8}$, $x \in \mathbb{R}$
Chaîne (composition)	Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions, $x \in \mathbb{R}$ $[f(g(x))]' = \underbrace{f'(g(x))} \times g'(x)$ ici f prend comme valeur d'entrée la fonction $g(x)$ dans la fonction f, tu remplaces tous les x par $g(x)$. Puis tu remplaces $g(x)$ par sa formule. Ensuite tu dérives. Regarde l'exemple tu vas comprendre ! 😉	Soient $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2$ et $g'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$ $f(g(x)) = 2\underbrace{(g(x))}_{\text{tu remplaces le } x \text{ par } g(x)} = 2x^2$ $g(x) = x^2$ donc tu remplaces $g(x)$ par x^2 Tu obtiens donc : $f(g(x)) = 2x^2$ et maintenant tu dérives ça pour obtenir $f'(g(x))$! $f'(g(x)) = 2 \times 2x^{2-1} = 4x$, $x \in \mathbb{R}$ ici on a appliqué 2 règles en même temps, l'identité et la puissance. $\Rightarrow [f(g(x))]' = 4x \times 2x = 8x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

TABLEAU RECAPITULATIF

Fonction	Dérivée
a	0
ax	a
x^n	nx^{n-1}
$f+g$	$f'+g'$
$f-g$	$f'-g'$
$f\times g$	$f'g+fg'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x))\times g'(x)$

Tu vois y'en a pas tant que ça 👌

Tu verras après avoir fait des exercices ça sera naturel pour toi !

DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES

Ces dérivées là aussi sont à apprendre par coeur car tu ne peux pas les deviner !

Fonction	Dérivée
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

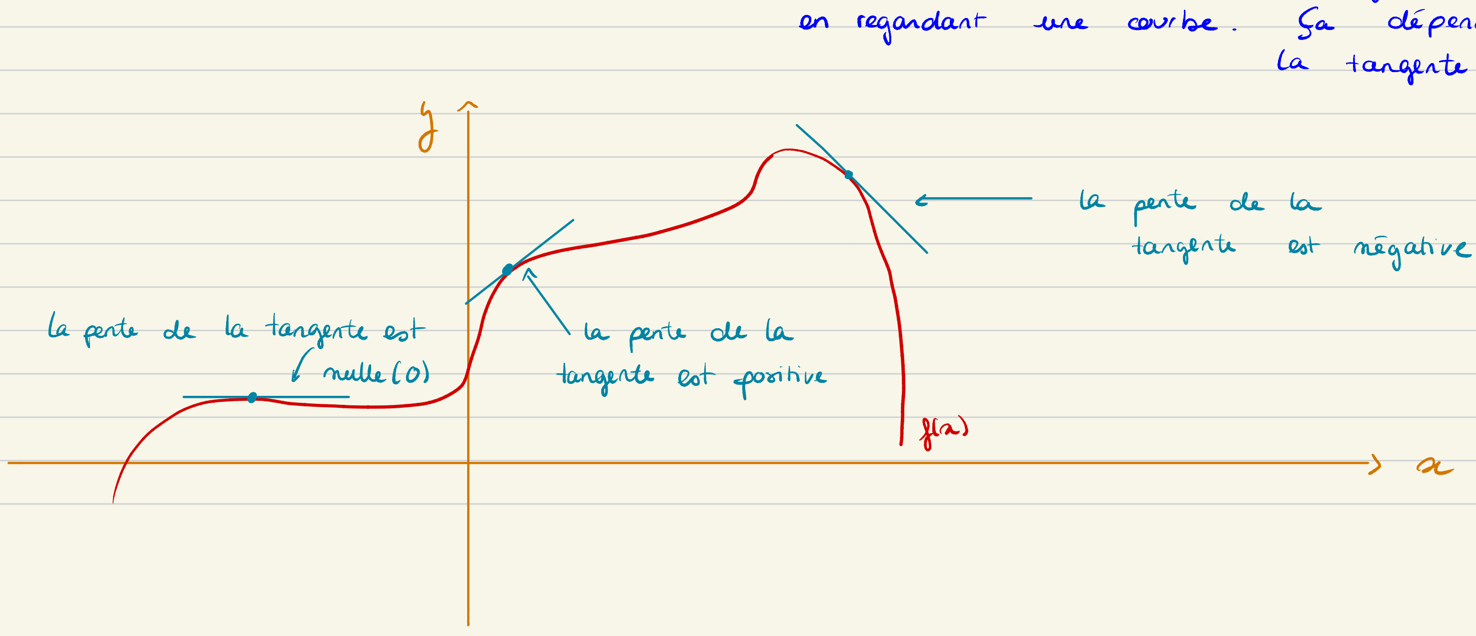
note que $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Je t'épargne les autres fonctions trigonométriques mais tu seras peut être amené à devoir les apprendre par coeur ! ...

Interprétation graphique

* en regardant un graphe, tu peux imaginer (ou même tracer) une tangente à un point.

Donc tu peux deviner si la dérivée est positive, négative ou nulle juste en regardant une courbe. Ça dépend de la pente de la tangente.



souviens toi que la pente de la tangente c'est la dérivée !

Tu peux faire une étude de signe de ta dérivée et créer le tableau de variation de ta fonction.
Je te montrerai un exemple dans les exercices!

Signe de la dérivée	Variations de la fonction
+	↗ (la courbe monte)
−	↘ (la courbe descend)
0	la courbe est plate (maximum, minimum ou point d'inflexion)

= un point où la courbe change de sens.